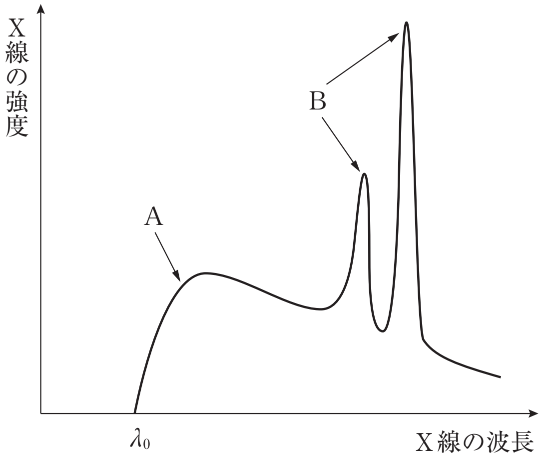
第4講　X線と結晶解析

1

次の文章を読み以下の問いに答えなさい。ただし，電子の電荷を $-e$（$e>0$），電子の質量を m，光速を c，プランク定数を h とする。

1895年にレントゲンは，透過力の強い未知の放射線を発見しこれをX線と名付けた。X線は，波長の短い［(ア)］であり，その波長が［(イ)］ほどエネルギーが高く，透過力が［(ウ)］。

X線の発生装置は，陰極のフィラメントを加熱して出てくる熱電子を高い電圧 V で加速して陽極の金属ターゲットに衝突させて，X線を発生する。図は，陰極と陽極の電圧を V としたときに得られるX線の強度と波長の関係を表したものである。この図のAの部分は［(エ)］，Bの部分は［(オ)］と呼ばれている。加速する電圧 V を変えると，Aの最短波長 λ_0 は［(カ)］が，Bの部分の波長は［(キ)］。



図

(1)　文章中の空欄［(ア)］から［(キ)］に入る最も正しいものを次の①〜⑭から選び番号で答えなさい。

①　ド・ブロイ波	②　物質波
③　電磁波	④　衝撃波
⑤　強　い	⑥　弱　い
⑦　短　い	⑧　長　い
⑨　連続X線	⑩　散乱X線
⑪　固有（または特性）X線	⑫　透過X線
⑬　変わらない	⑭　変わる

(2)　X線の最短波長 λ_0 を e，V，h，c を用いて表しなさい。

(3)　加速した電子の物質波の波長 λ_e を e，V，h，m を用いて表しなさい。

(4)　下線部の理由を簡潔に書きなさい。

＜ Note ＞

2

次の□の中に適当な式または数値を入れよ。ただし，電子の電荷を $-e$ [C]，電子の質量を m [kg]，光速度を c [m/s]，プランク定数を h [J·s] とする。

(1)　図1はX線管球の内部を示したものである。真空中でフィラメントに電流を流すことによりフィラメントFから熱電子が放出される。ターゲットTを陽極としてFとTとの間に電圧 V [V] をかけると，電子は加速されてターゲット表面に達する。いまFにおける電子の初速度が0 [m/s] であるとき，電圧 V [V] で加速された電子がTに達したときの運動エネルギーは［(ア)］[J] となる。

電子がTにおいて急に止められると，その運動エネルギーの全てまたは一部がX線光子のエネルギーとなる。これが連続X線と呼ばれるものである。連続X線の波長を λ，振動数を ν とする。いま電子の運動エネルギーが全てX線光子のエネルギーに変換されるとき，［(ア)］＝［(イ)］[J] となる。λ と ν の間には［(ウ)］$=c$ [m/s] という関係があるので，$\lambda=$［(エ)］[m] が連続X線の最短波長を与える。

つぎに，FからTに向かう電子の運動エネルギーを吸収してTの金属原子が励起状態となる場合を考える。電圧 V [V] が十分高いと金属原子から電子が飛び出して励起状態となる。励起状態から基底状態に戻る際に，電子は高いエネルギー準位から低いエネルギー準位に移り，X線が放射される。これが特性X線（または固有X線）と呼ばれるものである。いま特性X線の波長を λ_1 [m] とするとTの金属原子の電子のエネルギー準位の差は［(オ)］[J] となる。

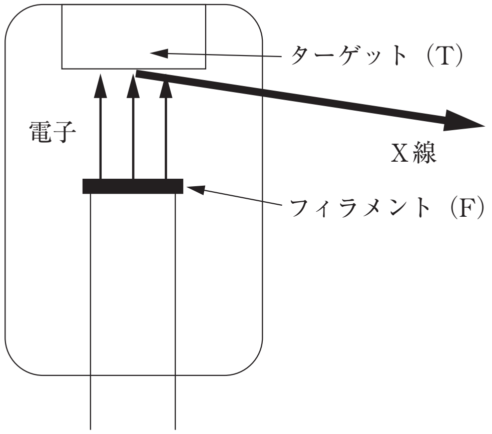


図1

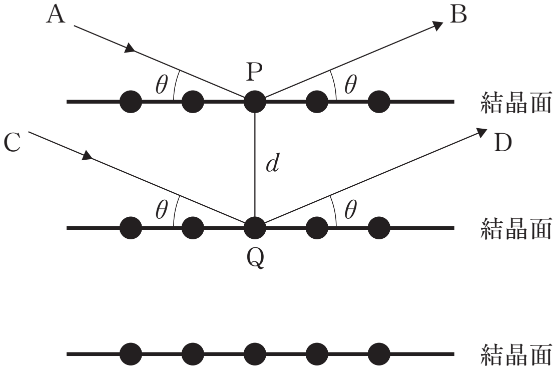


図2

(2)　波長 λ_1 [m] の特性X線が結晶に入射した場合を考える。図2のように原子が規則的に配列して結晶を形成しているとき，結晶面（格子面）の間隔を d [m] とする。X線は結晶面で反射され，沢山の面からの反射波が干渉してX線回折を起こす。いま1枚目の結晶面で反射されるX線の道筋をAPBとし，2枚目の結晶面で反射される道筋をCQDとす

＜ Note ＞

る。結晶面とX線のなす角度を θ [rad] とすると２つの道筋の差は (カ) [m] となる。道筋の差を位相差に変換すると (キ) [rad] となる。(カ) [m] が１波長に等しいときに位相差が (ク) [rad] となって強め合う。これよりブラッグ反射の条件式 (ケ) が求まる。

(3)　X線回折の実験では波長が分かったX線を使い，散乱角 2θ [rad] を測定して (ケ) の関係から d [m] を求める。図３のように，波長 1.54×10^{-10} [m] のX線を結晶試料に入射したところ，強め合ったX線が 60°（$\frac{\pi}{3}$ [rad]）の角度に散乱された。このとき結晶面の間隔 d [m] は (コ) [m] となる。

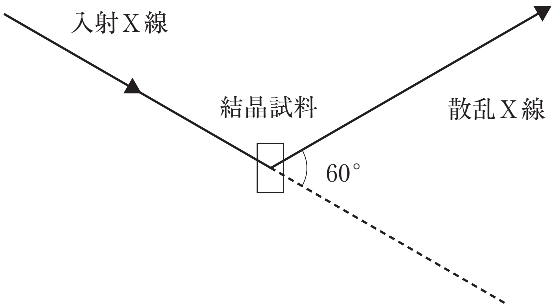


図３

＜ Note ＞

3

次の文中の空欄に，適当な式または数を入れよ。

面Ｓを境として真空Ａと物質Ｂとが接しており，この面Ｓで空間の電位が不連続に変わる。電子線がＡからＢに入射すると，図１のように，境界面で光と同じような屈折をする。入射角を θ_1，屈折角を θ_2，Ａ側での電子の運動量を p_1，Ｂ側での運動量を p_2 とすると，ド・ブロイの物質波の関係から電子線の屈折率 μ は

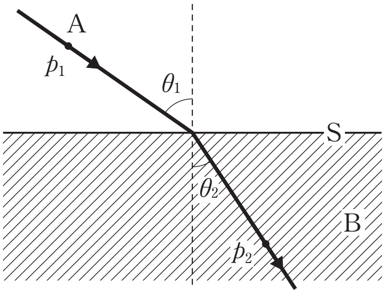


図１

$$\mu = \frac{\sin\theta_1}{\boxed{(イ)}} = \frac{p_2}{\boxed{(ロ)}} \qquad (1)$$

で表される。

電荷 $-e$，質量 m の電子を加速電圧 V[V] で加速し，運動エネルギー eV[J] でＡ側より入射させる。

電子の電気的な位置エネルギーをＡ側で０J，Ｂ側で $-eV_0$[J] とすれば，

$$eV = \frac{{p_1}^2}{2m} = \boxed{(ハ)} - eV_0 \qquad (2)$$

の関係がある。したがって，電子のＡ側での波長 λ_1，Ｂ側での波長 λ_2 は，eV および eV_0 を用いて表すと，それぞれ

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{\boxed{(ニ)}}},\quad \lambda_2 = \frac{h}{\sqrt{\boxed{(ホ)}}} \qquad (3)$$

となる。ここで，h はプランク定数である。したがって，μ は V，V_0 を用いて

$$\mu = \sqrt{\boxed{(ヘ)}} \qquad (4)$$

で表される。また，(3)の第一式は，λ_1 をÅ（$1\text{Å} = 10^{-10}$m）で表すと，

$$\lambda_1[\text{Å}] = \sqrt{\frac{150}{V[\text{V}]}} \qquad (5)$$

である。

次に，図２のように電子線が真空Ａから結晶格子Ｂに入射する場合を考える。この場合，光と同じように回折や干渉を生じる。いま，境界面Ｓに平行な，面間隔 d なる格子面による電子線の反射（ブラッグ反射）を考える。隣り合っている格子面によって反射される電子線は，それらの道のりの差（径路差）が波長の整数倍になるときだけ強めあう。したがっ

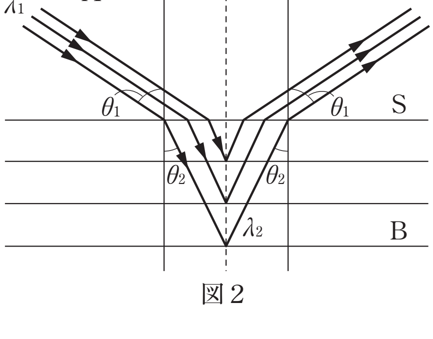


図２

＜ Note ＞

て，格子面による反射線は強めあう方向だけに観察される。

入射波の波長を λ_1，入射角を θ_1，結晶中での波長を λ_2，屈折角を θ_2 とすると，この強めあう条件は

$n\lambda_2=$ [(ト)]　($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$)　(6)

となる。

(1)式を用いて(6)式を λ_1，および θ_1 で表すと，

$\mu^2-1=$ [(チ)] $-\cos^2\theta_1$　(7)

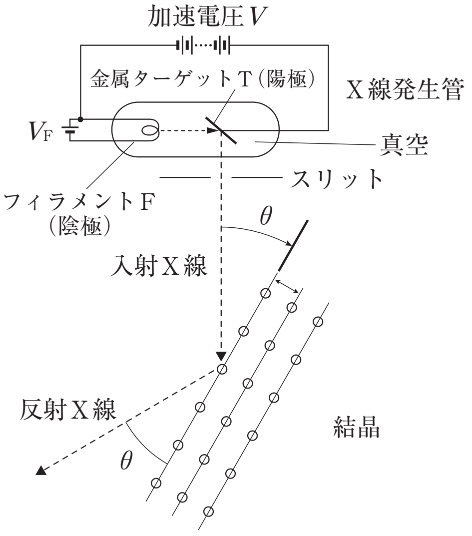
が成立する。

Ｂが岩塩の場合には，内部電位 V_0 は 7.7V，格子面の間隔は 2.8Å である。電子の加速電圧を 60kV とすると，第二次反射（$n=2$）にたいして $\cos^2\theta_1$ の値は，有効数字２桁で [(リ)] となる。

＜ Note ＞

第4講　確認テスト

私たちは物質の微細な構造を調べるためにX線や電子線を利用する。以下の文中の[　　]のうち，(2)，(4)，(10)，(11)には式を，(7)，(8)，(9)，(12)には数値（有効数字2桁）を，それ以外には最も適切な語句を選択肢の中から選んで入れよ。必要に応じて，次の記号，または数値を使用せよ。光の速度：$c=3.0\times10^{8}$m/s，プランク定数：$h=6.6\times10^{-34}$J·s，電気素量：$e=1.6\times10^{-19}$C，電子の質量：$m=9.1\times10^{-31}$kg。重力の影響は無視できる。



図に示すようなX線発生管と結晶を用いて回折実験を行う。X線発生管の内部は真空である。フィラメントFを加熱するための電圧 V_F [V] は，加速電圧に対して無視できるほど小さいものとする。フィラメントFを加熱すると電子が真空中に放出される。この電子を[(1)]電子という。陰極であるフィラメントFから初速度0で放出された[(1)]電子は加速電圧 V [V] で加速されて陽極である金属ターゲットTに衝突する。その衝突のときの電子の速さ v [m/s] は，[(2)] [m/s] である。ターゲットTに電子が衝突すると，二種類のX線が発生する。ひとつは広い波長分布を持つ[(3)]X線で，その最短波長 λ_{min} [m] は，[(4)] [m] である。もうひとつはターゲット原子の種類によって，決まった波長に生じる鋭いピークの[(5)]X線である。[(5)]X線は，次のようなしくみで生じる。加速された電子が，ターゲット原子に衝突すると原子内の電子をたたき出す。その電子が占めていた[(6)]に，その外側の[(6)]の電子が落ち込むことによって[(5)]X線が放射される。ターゲット原子の[(6)]間のエネルギー差が 1.875×10^{4}eV であるとき，1eV は[(7)] J なので，[(5)]X線の波長は[(8)] [m] である。

波長[(8)] [m] の[(5)]X線を，スリットを通して，結晶に照射する。X線の入射方向

をはじめ結晶面に平行（$\theta=0°$）にし，結晶をしだいに回転させたところ，$\theta=30°$ ではじめて強い反射が観測された。このとき，ブラッグ反射の条件から，反射を生じた結晶面の間隔 d [m] は，［ (9) ］[m] であることがわかる。このように結晶面の間隔と同程度の波長を持つ電磁波を用いれば，回折実験によって物質の構造についての重要な情報を得ることができる。

ド・ブロイは，粒子である電子にも波動性があると考えた。一般に物質粒子が波動としてふるまうときの波を物質波という。その物質波の波長 λ [m] は, その粒子の運動量 p [kg･m/s] を用いて，［ (10) ］[m] と表される。真空中で初速度 0 から電圧 V [V] で加速された電子の物質波としての波長 λ_1 [m] は，［ (11) ］[m] である。1.0×10^{-10} [m] の波長を得るためには［ (12) ］[V] の電圧で電子を加速すればよい。加速された電子の物質波としての性質を利用してもX線と同じように回折実験を行うことができる。

［ (1) ］の選択肢

①　光　　②　高速　　③　熱　　④　特性

［ (2) ］の選択肢

①　$\sqrt{\dfrac{2em}{V}}$　　②　$\sqrt{\dfrac{2eV}{m}}$　　③　$\dfrac{h}{2emV}$　　④　$\dfrac{h}{\sqrt{2emV}}$

［ (3) ］の選択肢

①　高速　　②　特性　　③　普通　　④　連続

［ (4) ］の選択肢

①　$\dfrac{h}{p}$　　②　$\dfrac{hc}{p}$　　③　$\dfrac{hc}{eV}$　　④　$\dfrac{eV}{hc}$

［ (5) ］の選択肢

①　高速　　②　特性　　③　普通　　④　連続

［ (6) ］の選択肢

①　核エネルギー　　②　エネルギー系列　　③　エネルギー準位　　④　振動数

［ (7) ］の選択肢

①　1.6×10^{-19}　　②　1.2×10^{-19}　　③　2.5×10^{2}　　④　6.6×10^{-11}

(8) の選択肢

① 1.5×10^{2}　② 3.4×10^{-11}　③ 6.6×10^{-34}　④ 6.6×10^{-11}

(9) の選択肢

① 1.5×10^{2}　② 2.5×10^{2}　③ 6.6×10^{-34}　④ 6.6×10^{-11}

(10) の選択肢

① hp　② $\dfrac{h}{p}$　③ $\dfrac{hc}{p}$　④ $\dfrac{hp}{c}$

(11) の選択肢

① $\sqrt{\dfrac{2em}{V}}$　② $\sqrt{\dfrac{2eV}{m}}$　③ $\dfrac{h}{2emV}$　④ $\dfrac{h}{\sqrt{2emV}}$

(12) の選択肢

① 1.6×10^{-19}　② 1.2×10^{-19}　③ 1.5×10^{2}　④ 2.5×10^{2}

< Note >

第４講　解答

1

(1)　(ア)　③　　(イ)　⑦

　　(ウ)　⑤　　(エ)　⑨

　　(オ)　⑪　　(カ)　⑭

　　(キ)　⑬

(2)　$\lambda_0 = \dfrac{hc}{eV}$

(3)　$\lambda_e = \dfrac{h}{\sqrt{2meV}}$

(4)　固有X線は，金属ターゲットの金属原子のエネルギー準位により生じるため，入射電子のエネルギーには依存しない。

2

(ア)　eV　　(イ)　$h\nu$　　(ウ)　$\lambda\nu$　　(エ)　$\dfrac{hc}{eV}$

(オ)　$\dfrac{hc}{\lambda_1}$　　(カ)　$2d\sin\theta$　　(キ)　$\dfrac{4\pi d\sin\theta}{\lambda_1}$　　(ク)　2π

(ケ)　$2d\sin\theta = \lambda_1$

(コ)　1.54×10^{-10}　または　$1.54\times10^{-10}\cdot n$　(n は自然数)

3

(イ)　$\sin\theta_2$　　(ロ)　p_1　　(ハ)　$\dfrac{{p_2}^2}{2m}$

(ニ)　$2meV$　　(ホ)　$2me(V+V_0)$　　(ヘ)　$\dfrac{V+V_0}{V}$

(ト)　$2d\cos\theta_2$　　(チ)　$\left(\dfrac{n\lambda_1}{2d}\right)^2$　　(リ)　1.9×10^{-4}

第４講　確認テスト

【解答】

(1)　③　(2)　②　(3)　④　(4)　③　(5)　②　(6)　③　(7)　①　(8)　④
(9)　④　(10)　②　(11)　④　(12)　③

【解説】

(1)　熱エネルギーを得て外に飛び出した電子を熱電子という。

(2)　エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \qquad \therefore \quad v = \underline{\sqrt{\frac{2eV}{m}}}$$

(3)　連続

(4)　電子のエネルギーがすべてＸ線に変わった場合ゆえ，

$$eV = \frac{hc}{\lambda_{\min}} \qquad \therefore \quad \lambda_{\min} = \underline{\frac{hc}{eV}}$$

(5)　特性

(6)　エネルギー準位

(7)　$1\,[\mathrm{eV}] = \underline{1.6\times10^{-19}\,[\mathrm{J}]}$

(8)　エネルギー差を $\Delta\varepsilon$ として

$$\Delta\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} \qquad \therefore \quad \lambda = \frac{hc}{\Delta\varepsilon} = \frac{6.6\times10^{-34}\,[\mathrm{J\cdot s}]\times3.0\times10^{8}\,[\mathrm{m/s}]}{1.875\times10^{4}\times1.6\times10^{-19}\,[\mathrm{J}]}$$

$$\fallingdotseq \underline{6.6\times10^{-11}\,[\mathrm{m}]}$$

(9)　ブラッグ条件で，$m=1$ として

$$2d\sin30^\circ = 1\cdot\lambda \qquad \therefore \quad d = \lambda = \underline{6.6\times10^{-11}\,[\mathrm{m}]}$$

(10)　光子の運動量は

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad \therefore \quad \lambda = \underline{\frac{h}{p}}$$

(11)　加速された電子のエネルギーは

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV$$

なので運動量は

$$\therefore \quad mv = \sqrt{2meV}$$

よって波長は

$$\lambda = \underline{\frac{h}{\sqrt{2meV}}}$$

(12)　(11)より

$$V = \frac{h^2}{2me\lambda^2} = \frac{(6.6\times10^{-34}\,[\mathrm{J\cdot s}])^2}{2\times9.1\times10^{-31}\,[\mathrm{kg}]\times1.6\times10^{-19}\,[\mathrm{C}]\times(1.0\times10^{-10}\,[\mathrm{m}])^2}$$

$$\fallingdotseq \underline{1.5\times10^{2}\,[\mathrm{V}]}$$